УДК 533.65.013.622 DOI 10.18698/2308-6033-2017-5-1616

Выбор оптимального аккумулятора для многороторного беспилотного вертолета (мультикоптера)

© С.З. Свердлов

Вологодский государственный университет, Вологда, 160000, Россия

Рассмотрена задача о выборе массы аккумуляторной батареи, обеспечивающей максимальную продолжительность полета электрического мультикоптера в режиме висения с учетом изменения КПД электромотора. Определено, что максимальной продолжительности полета мультикоптера в режиме висения можно достичь, когда относительная масса аккумуляторной батареи находится в переделах от 1 до 2. Установлено, что учет изменения КПД двигателя почти не влияет на значения относительной массы аккумуляторной батареи. Даны рекомендации по относительной массе аккумуляторной батареи и определен диапазон ее значений — от 0,36 до 0,90.

Ключевые слова: *беспилотный многороторный электрический вертолет, мультикоптер, аккумуляторная батарея, максимальное время полета, относительная масса аккумуляторной батареи, тяговооруженность, бесколлекторный электромотор*

Введение. В работах [1–3] указано, что наибольшая продолжительность полета (висения) электрического мультикоптера (рис. 1) достигается, когда относительная масса аккумуляторной батареи

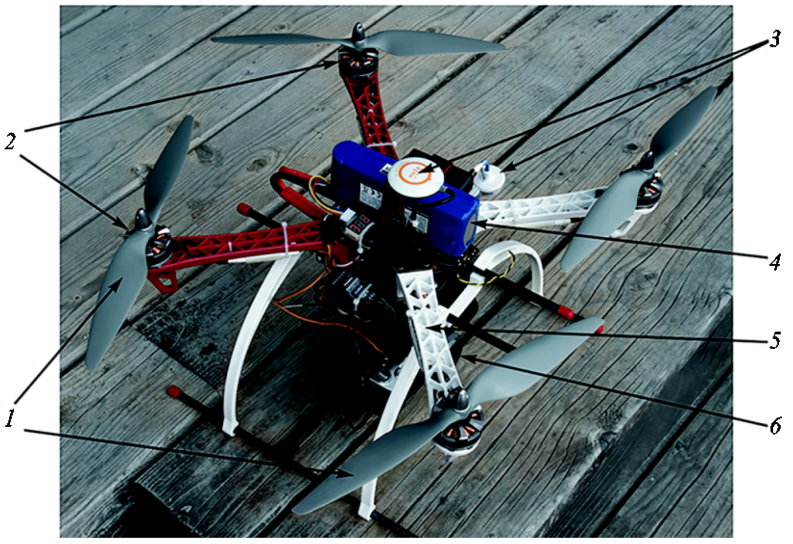


Рис. 1. Квадрокоптер:
1 — несущие винты (пропеллеры); *2* — бесколлекторные электромоторы; *3* — элементы бортовой аппаратуры; *4* — аккумуляторная батарея; *5* — рама; *6* — полезная нагрузка (фотокамера)

равна 2. Под относительной массой m понимают отношение массы аккумуляторной батареи $M_{\text{АКБ}}$ к массе M_0 летательного аппарата (ЛА) без нее:

$$m = \frac{M_{\text{АКБ}}}{M_0}. \tag{1}$$

Вместе с тем приведенные в работе [3] результаты вычислительного эксперимента свидетельствуют о том, что максимума зависимости времени от относительной массы аккумуляторной батареи в реальных конфигурациях можно достичь при $m < 2$ (рис. 2) [3].

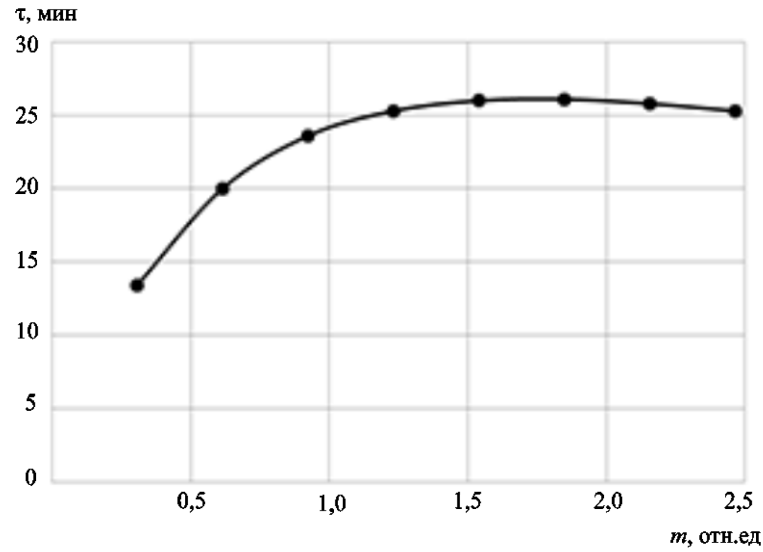


Рис. 2. Зависимость времени полета мультикоптера от массы аккумуляторной батареи (вычислительный эксперимент)

Задачи настоящей работы — уточнение математической модели, использованной в статье [3] для определения оптимальной относительной массы аккумуляторной батареи, и уточнение расчета оптимальной относительной массы аккумуляторной батареи. В новой модели учтено непостоянство КПД электродвигателя при изменении массы аккумуляторной батареи и ЛА.

КПД бесколлекторного мотора при висении. В конструкции мультикоптеров используются почти исключительно бесколлекторные (вентильные) электродвигатели [4, 5]. В работе [6] представлена формула, дающая оценку КПД бесколлекторного электродвигателя при его работе в режиме висения ЛА у поверхности Земли:

$$\eta_M^{\text{вис}} = \frac{\sqrt{k_T}\,\eta_{100}}{\eta_{100}\sqrt{k_T} + (1-\eta_{100})}, \tag{2}$$

где k_T — безразмерный коэффициент запаса тяги у поверхности Земли (тяговооруженность ЛА); η_{100} — безразмерный коэффициент, характеризующий жесткость механической характеристики электродвигателя.

Безразмерный коэффициент k_T запаса тяги у поверхности Земли определяют по выражению

$$k_T = \frac{zT_{100}}{G}, \tag{3}$$

где z — количество пропеллеров мультикоптера; T_{100} — тяга, создаваемая одним пропеллером при работе на месте при 100 % газа (управляющего сигнала) у поверхности Земли; G — масса ЛА.

Безразмерный коэффициент n_{100}, характеризующий жесткость механической характеристики электродвигателя, можно вычислить из равенства

$$\eta_{100} = \frac{n_{100}}{n_0}, \ \eta_{100} \le 1, \tag{4}$$

где n_0 — частота холостого хода электродвигателя (об/с); n_{100} — частота вращения мотора и пропеллера при 100 % газа при работе винтомоторной группы (ВМГ) на месте у поверхности Земли, т. е. в режиме максимальной тяги. Величина η_{100} приближенно равна КПД мотора при работе ВМГ в этом режиме.

Оценка времени полета с учетом КПД двигателя. Время полета τ в режиме висения может быть оценено [3] как

$$\tau = K\eta_M^{\text{вис}} \frac{m}{(1+m)^{3/2}} = K \frac{\sqrt{k_T}\,\eta_{100}}{\eta_{100}\sqrt{k_T} + (1-\eta_{100})} \frac{m}{(1+m)^{3/2}}, \tag{5}$$

где K — коэффициент, который остается постоянным в условиях обсуждаемой задачи.

При изменении массы батареи изменяется и тяговооруженность. Выразим массу ЛА через массу аккумуляторной батареи и массу ЛА без нее:

$$G = g\left(M_0 + M_{\text{АКБ}}\right) = gM_0\left(1+m\right), \tag{6}$$

где g — ускорение свободного падения.

Подставим выражение (6) в формулу (3):

$$k_T = \frac{zT_{100}}{gM_0\left(1+m\right)}. \tag{7}$$

Формулу (7) можно переписать в виде

$$k_T = \frac{k_{T_0}}{1+m}, \tag{8}$$

где $k_{T_0} = \dfrac{zT_{100}}{gM_0}$ — тяговооруженность, рассчитанная по массе без аккумуляторной батареи (при нулевой массе аккумулятора).

Подставив формулу (8) в выражение для КПД мотора (2), а формулу для КПД мотора (2) в формулу (5), по которой оценивается время висения, получаем

$$\tau = K\frac{\sqrt{k_{T_0}}\,\eta_{100}m}{\sqrt{k_{T_0}}\,\eta_{100}(1+m)^{3/2} + (1-\eta_{100})(1+m)^2}. \tag{9}$$

Для того чтобы определить значение $m_{\text{опт}}$, при котором функция (9) достигает максимума, найдем ее производную по m и приравняем производную нулю. Получаем уравнение для определения $m_{\text{опт}}$:

$$\sqrt{k_{T_0}}\,\eta_{100}(m_{\text{опт}}-2) + 2(1-\eta_{100})(m_{\text{опт}}-1)\sqrt{m_{\text{опт}}+1} = 0. \tag{10}$$

Аналитическое решение уравнения (10) сводится к вычислению корней алгебраического уравнения третьей степени. Воздержимся, однако, от использования громоздких формул, которые получились бы в этом случае.

Одним из ключевых параметров при проектировании мультикоптера является тяговооруженность. При этом разработчика интересует тяговооруженность аппарата с учетом массы аккумуляторной батареи, т. е. k_T при найденном $m_{\text{опт}}$, а не значение k_{T_0}. Чтобы найти $m_{\text{опт}}$ для заданной тяговооруженности оптимальной конфигурации, выразим k_{T_0} из (8) через k_T:

$$k_{T_0} = k_T(1+m_{\text{опт}}). \tag{11}$$

Подставим выражение (11) в уравнение (10):

$$\sqrt{k_T(1+m_{\text{опт}})}\,\eta_{100}(m_{\text{опт}}-2) + 2(1-\eta_{100})(m_{\text{опт}}-1)\sqrt{m_{\text{опт}}+1} = 0. \tag{12}$$

Теперь уравнение (12) можно разделить на $\sqrt{1+m_{\text{опт}}}$, понизив его степень:

$$\sqrt{k_T}\,\eta_{100}(m_{\text{опт}}-2) + 2(1-\eta_{100})(m_{\text{опт}}-1) = 0. \tag{13}$$

Решение уравнения (13) дает значение относительной массы аккумуляторной батареи, при котором достигается наибольшее время висения при заданной тяговооруженности:

$$m_{\text{опт}} = \frac{2\left[\left(1-\eta_{100}\right)+\sqrt{k_T\,\eta_{100}}\right]}{2\left(1-\eta_{100}\right)+\sqrt{k_T\,\eta_{100}}}. \qquad (14)$$

Графики зависимости времени висения от относительной массы аккумуляторной батареи построены в соответствии с формулой (9) (рис. 3). Значения по оси ординат нормированы так, чтобы максимальное значение в варианте *2* было равно 1.

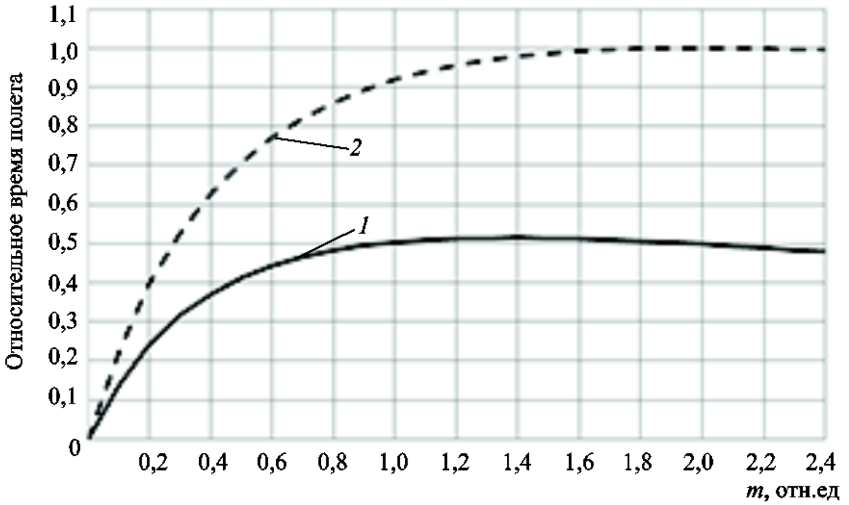


Рис. 3. Зависимость относительного времени полета от относительной массы аккумуляторной батареи:
1 — $\eta_{100} = 0{,}65$, $k_T = 1{,}7$, $k_{T_0} = 4{,}33$; $m_{\text{опт}} = 1{,}55$; *2* — $\eta_{100} = 1$, $m_{\text{опт}} = 2{,}0$

Рассмотрим частные случаи. Если $\eta_{100} = 1$, что соответствует мотору с идеально жесткой характеристикой и КПД = 100 %, по формуле (14) получаем $m_{\text{опт}} = 2$ (кривая *2*, рис. 3). Это значение совпадает с найденным в работе [3] для модели, в которой КПД мотора считается постоянным при изменении массы аккумулятора. При η_{100}, стремящемся к нулю, формула (14) дает $m_{\text{опт}} = 1$. При $0 < \eta_{100} < 1$ значение относительной массы аккумуляторной батареи, при котором достигается наибольшее время висения, находится в пределах от 1 до 2, зависит от тяговооруженности и монотонно возрастает с ростом η_{100}.

На рис. 4 приведена зависимость оптимального значения относительной массы аккумуляторной батареи от η_{100} при двух значениях тяговооруженности k_T. При тяговооруженности, равной 4, что можно считать верхним пределом для реальных ЛА, зависимость линейна; $k_T = 1$ — это теоретический нижний предел тяговооруженности.

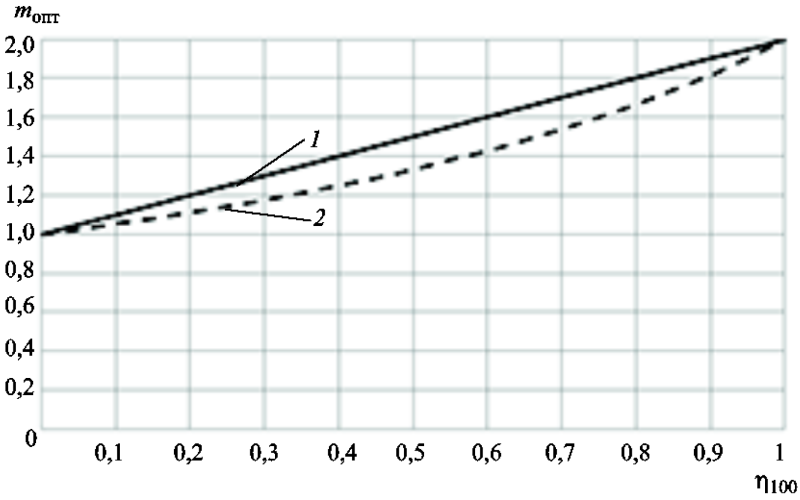


Рис. 4. Зависимость оптимальной относительной массы аккумуляторной батареи от тяговооруженности и КПД:
1 — $k_T = 4$; *2* — $k_T = 1$

Рациональный выбор массы аккумуляторной батареи. Использование относительной массы аккумуляторной батареи, соответствующей максимальной продолжительности полета, сталкивается с определенными препятствиями. Для того чтобы с ростом массы аккумуляторной батареи сохранялась тяговооруженность ЛА в приемлемых пределах, необходимо увеличивать мощность моторов и размер пропеллеров, что ведет к возрастанию массы и обусловливает необходимость усиления конструкции, в свою очередь увеличивающего массу. При больших значениях относительной массы аккумуляторной батареи такого рода зависимости могут оказаться труднопреодолимыми.

Представляется рациональным использование относительной массы аккумуляторной батареи меньшего значения — $m_{опт}$. При этом можно исходить из того, что вблизи максимума зависимость времени от относительной массы аккумуляторной батареи (см. рис. 3) малочувствительна к изменению m. Поэтому заметное уменьшение m не приведет к существенному сокращению времени полета. В работе [3] предложены два критерия для выбора рациональной массы аккумулятора: интегральный и дифференциальный.

Интегральный критерий выбора рациональной массы аккумулятора. В соответствии с интегральным критерием предлагается выбирать такое значение m, при котором средний темп увеличения времени полета с ростом массы аккумуляторной батареи будет не меньше темпа увеличения ее массы. В модели, которая не учитывает изменение КПД мотора, получаем значение

$$m_{инт} = \frac{3}{2^{2/3}} - 1 \approx 0,89. \qquad (15)$$

Используем такой же критерий и в рассматриваемом случае. Как и в работе [3], рассмотрим относительное время полета, т. е. время, отнесенное к максимально возможному времени полета. Уравнение для определения относительной массы $m_{\text{инт}}$ по интегральному критерию можно записать так:

$$\frac{\tau}{\tau_{\max}} = m. \tag{16}$$

Значение $\tau_{\max}$ можно найти подстановкой в формулу (5) значения $m_{\text{опт}}$, которое определяется по формуле (14). Условимся, что в дальнейших выкладках опустим коэффициент K, который не влияет на относительное время полета. После подстановок и преобразований получаем

$$\tau_{\max} = 2\eta_{100}\sqrt{\frac{k_T\left[2\left(1-\eta_{100}\right)+\sqrt{k_T}\,\eta_{100}\right]}{\left[4\left(1-\eta_{100}\right)+3\sqrt{k_T}\,\eta_{100}\right]^3}}. \tag{17}$$

Уравнение (16) с учетом формулы (5), если опустить K, запишем как

$$\frac{\eta_M^{\text{вис}}}{\tau_{\max}}\frac{m}{(1+m)^{3/2}} = m, \tag{18}$$

а его решение будет следующим:

$$m_{\text{инт}} = \left(\frac{\eta_M^{\text{вис}}}{\tau_{\max}}\right)^{2/3} - 1, \tag{19}$$

где $\eta_M^{\text{вис}}$ вычисляется по формуле (2), а $\tau_{\max}$ — по формуле (17).

Следует отметить, что использование выражения (5) в приведенных для получения формулы (19) выкладках не означает, что зависимость времени полета от массы аккумулятора в рассматриваемом случае такая же, как и в модели, не учитывающей изменение КПД мотора. Зависимость (5) при фиксированных η_{100} и k_T показывает, как будет изменяться время полета, если при каждом значении m обеспечивается заданная фиксированная тяговооруженность (значение k_T). Это предполагает, что масса ЛА без аккумулятора не остается постоянной. Зависимость времени от m при фиксированной массе M_0 выражается формулой (9). Именно максимум этой функции используется для нормирования времени в уравнении (16).

Значение $m_{\text{инт}}$ при изменении η_{100} от 1 до 0 составляет от $\frac{3}{2^{2/3}} - 1 \approx 0,89$ до 1. При значениях η_{100} и k_T, соответствующих пара-

метрам реальных ЛА, изменение будет меньше. Так, при $\eta_{100} \geq 0{,}5$ и $1{,}25 \leq k_T \leq 2{,}5$ значение $m_{\text{инт}}$ варьирует в пределах от 0,89 до 0,92. На практике это означает, что таким изменением можно пренебречь и в качестве рекомендованного значения относительной массы аккумулятора по интегральному критерию принять $m_{\text{инт}} \approx 0{,}9$ независимо от значений η_{100} и k_T.

Дифференциальный критерий. В соответствии с работой [3] минимальной рациональной относительной массой аккумуляторной батареи можно считать такое значение $m_{\text{диф}}$, при котором производная по m относительного времени полета равна 1.

Дифференцируя левую часть (18) по m и приравнивая производную к 1, получаем уравнение

$$\frac{\eta_M^{\text{вис}}}{\tau_{\max}} \frac{2-m}{2(1+m)^{5/2}} = 1. \qquad (20)$$

Его численное решение при изменении η_{100} от 1 до 0 дает значение корня в диапазоне от 0,355 до 0,390. При $\eta_{100} \geq 0{,}5$ и $1{,}25 \leq k_T \leq 2{,}5$, что примерно соответствует значениям этих параметров у реальных ЛА, значение $m_{\text{диф}}$ изменяется в небольших пределах: от 0,355 до 0,366. Это означает, что на практике такими изменениями можно пренебречь и ориентироваться на $m_{\text{диф}} \approx 0{,}36$ независимо от значений η_{100} и k_T.

Заключение. При учете непостоянства КПД электромотора можно достичь максимальной продолжительности полета в режиме висения, когда относительная масса аккумуляторной батареи (отношение массы аккумуляторной батареи к массе ЛА без нее) находится в пределах от 1 до 2. Значение относительной массы, соответствующее максимуму времени, в существенной степени зависит от жесткости механической характеристики двигателя (КПД двигателя при максимальной нагрузке) и в меньшей — от тяговооруженности.

Вместе с тем учет изменения КПД двигателя почти не влияет на значения относительной массы аккумуляторной батареи, которые определяются с использованием интегрального и дифференциального критериев [3]. Значения относительной массы аккумуляторной батареи, находящиеся в диапазоне от 0,36 до 0,90, можно рекомендовать как рационально обоснованные.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Andrés. *Optimal Battery Capacity*. 2011, April 12, 9 p. URL:http://api.ning.com/files/aFMLPsgnHmZXdNMAY8PM0KekqE4uAQSMx2C*usF6KDpKiqpO4L9-hrUKYBsS-xtRMqo-K4GR5TPsM2Isq56oMw__/battery_capacity.pdf

[2] Neitzke K.-P. Rotary Wing Micro Air Vehicle Endurance. *Proceedings of the International Micro Air Vehicle Conference and Flight Competition IMAV 2013, September 17–20*. Toulouse, France, 2013, pp. 16–25.

[3] Свердлов С.З. Продолжительность полета электрического беспилотного вертолета. *Вестник Вологодского государственного университета*, 2015, № 5/15.
URL: http://www.uni-vologda.ac.ru/~c3c/articles/FLIGHT%20DURATION%20OF% 20THE%20ELECTRIC%20UNMANNED%20HELICOPTER.pdf

[4] Овчинников И.Е. *Вентильные электрические двигатели и привод на их основе (малая и средняя мощность)*. Санкт-Петербург, Корона-Век, 2006, 336 с.

[5] Xia Ch.-l. *Permanent Magnet Brushless DC Motor Drives and Controls*. John Wiley & Sons, Singapore Pte. Ltd., 2012, 320 p.

[6] Свердлов С.З. Оптимальный вертикальный подъем электрического мультикоптера. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2016, вып. 11. URL: http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2016-11-1551

[7] Traub L.W. Range and Endurance Estimates for Battery-Powered Aircraft. *Journal of Aircraft*, 2011, vol. 48, no. 2, pp. 703–707. DOI: 10.2514/1.C031027

[8] Traub L.W. Optimal Battery Weight Fraction for Maximum Aircraft Range and Endurance. *Journal of Aircraft*, 2016, vol. 10, no. 3. DOI: 10.2514/1.C033416

[9] Джонсон У. *Теория вертолета*. В 2 книгах. Пер. с англ. Москва, Мир, 1983, кн. 1, 502 с.

Статья поступила в редакцию 11.11.2016

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Свердлов С.З. Выбор оптимального аккумулятора для многороторного беспилотного вертолета (мультикоптера). *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2017, вып. 5. http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2017-5-1616

Свердлов Сергей Залманович — канд. техн. наук, профессор кафедры прикладной математики Вологодского государственного университета. Область научных интересов: информационные технологии, цифровая фотография и обработка изображений, беспилотные вертолеты. e-mail: c3c@uni-vologda.ac.ru

Selecting the optimum battery for a multi-rotor unmanned electric helicopter (multicopter)

© S.Z. Sverdlov

Vologda State University, Vologda, 160000, Russia

The study deals with selecting a rechargeable battery mass that ensures maximum flight duration for an electric multicopter in hover mode, taking into account the changes in the electric motor energy conversion efficiency. As a result of studying a refined model that takes into account the changes in energy conversion efficiency, we discovered that using a relative battery mass between 1 and 2 leads to achieving the maximum flight duration in hover mode. The relative mass value corresponding to the maximum in time greatly depends on how rigid the speed-torque characteristic of the engine is, and depends on the thrust-to-weight ratio to a lesser degree. Taking into account the energy conversion efficiency of the engine does not really affect relative battery mass values that are determined using the integral and differential criteria. We can recommend designers to use the values we obtained for the relative battery mass.

Keywords: *multi-rotor unmanned electric helicopter, multicopter, rechargeable battery, maximum flight duration, relative battery mass, thrust-to-weight ratio, energy conversion efficiency, brushless electric motor*

REFERENCES

[1] Andrés. *Optimal Battery Capacity*. 2011, April 12, 9 p. URL:http://api.ning.com/files/aFMLPsgnHmZXdNMAY8PM0KekqE4uAQSMx2C*usF6KDpKiqpO4L9-hrUKYBsS-xtRMqo-K4GR5TPsM2Isq56oMw__/battery_capacity.pdf

[2] Neitzke K.-P. Rotary Wing Micro Air Vehicle Endurance. *Proceedings of the International Micro Air Vehicle Conference and Flight Competition IMAV 2013. September 17–20*. Toulouse, France, 2013, pp. 16–25.

[3] Sverdlov S.Z. *Vestnik Vologodskogo gosudarstvennogo universiteta — Bulletin of the Vologda State University*, 2015, no. 5/15. Available at: http://www.uni-vologda.ac.ru/~c3c/articles/FLIGHT%20DURATION%20OF%20THE%20ELECTRIC%20UNMANNED%20HELICOPTER.pdf

[4] Ovchinnikov I.E. *Ventilnye elektricheskie dvigateli i privod na ikh osnove (malaya i srednyaya moshchnost)* [AC converter-fed motors and drives based on them (low and medium power)]. St. Petersburg, Korona-Vek Publ., 2006, 336 p.

[5] Xia Ch.-l. *Permanent magnet brushless DC motor drives and controls*. John Wiley & Sons, Singapore Pte. Ltd., 2012, 320 p.

[6] Sverdlov S.Z. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2016, iss. 11. Available at: http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2016-11-1551

[7] Traub L.W. Range and Endurance Estimates for Battery-Powered Aircraft. *Journal of Aircraft*, 2011, no. 48 (2):703–707. DOI: 10.2514/1.C031027

[8] Traub L.W. Optimal Battery Weight Fraction for Maximum Aircraft Range and Endurance. *Journal of Aircraft*, 2016, vol. 10, no. 03. DOI: 10.2514/1.C033416

[9] Johnson W. *Helicopter Theory*. Princeton University Press, 1980 [In Russ.: Johnson W. Teoriya vertoleta. In 2 vols. Moscow, Mir Publ., 1983].

Sverdlov S.Z., Cand. Sc. (Eng.), Professor, Department of Applied Mathematics, Vologda State University. Specialises in information technology, digital photography and image processing, unmanned helicopters. e-mail: c3c@uni-vologda.ac.ru